

## 7. Übungsblatt für Track $\varepsilon$ zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 13/14

*Abgabe: Bis Freitag, 06.12.2013, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Bitte denken Sie an die Anmeldung zur Zwischenklausur!

### Der Fehler der Woche

$f \in \omega(n^\alpha)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , also ist  $f$  exponentiell.

Was ist falsch?

## Basisaufgaben

### B1: Rekursionsgleichungen und Satz 3.3

2 Punkte

Verwenden Sie Satz 3.3, um folgende homogene lineare Rekursionsgleichungen zu lösen:

- a)  $a_1 = 1,$   
 $a_2 = 4,$   
 $a_i = 2 \cdot a_{i-1} + 3 \cdot a_{i-2}, \quad i \geq 3.$
- b)  $b_0 = 5,$   
 $b_1 = 7,$   
 $b_2 = 9,$   
 $b_i = 12 \cdot b_{i-2} - 16 \cdot b_{i-3}, \quad i \geq 3.$

### B2: Subtraktionsmethode

3 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe der Subtraktionsmethode (diese haben wir bei der Analyse der Suchzeiten binärer Suchbäume kennengelernt) eine Rekursionsgleichung, die auf nur konstant viele Vorgänger zugreift und dieselbe Zahlenfolge erzeugt wie die nachfolgende Rekursionsgleichung mit Full History:

$$X_0 = 1,$$
$$X_n = 3 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k, \quad n \geq 1.$$

**B3: Sortierte Teilfolgen und Balanciertheit**

3 Punkte

Wir haben gesehen, dass das Einfügen einer sortierten Folge in einen binären Suchbaum diesen zu einer Liste entarten lässt. Wir untersuchen, ob dieser Effekt bereits durch das Vorkommen sortierter Teilfolgen in der Einfügefølge erzwungen wird.

Sei  $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$  eine Folge, dann ist  $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$  eine Teilfolge von  $(x_i)_i$  der Länge  $l \leq k$ , falls  $i_j < i_{j+1}$  für  $1 \leq j \leq l-1$  und  $1 \leq i_1$  sowie  $i_l \leq k$  gilt. Eine Teilfolge ist also die ursprüngliche Folge oder sie entsteht durch Weglassen von Einträgen der ursprünglichen Folge.

Eine Folge  $y_1, \dots, y_l$  heißt monoton, falls entweder  $y_i \leq y_{i+1}$  für alle  $i$  mit  $1 \leq i \leq l-1$  gilt, oder  $y_i \geq y_{i+1}$  für alle  $i$  mit  $1 \leq i \leq l-1$  gilt.

Die Einfügefølge  $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$ , die den binären Suchbaum  $T$  erzeugt, bestehe aus paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Es sei  $H$  die Höhe von  $T$  und es sei  $l$  die Länge einer längsten monotonen Teilfolge von  $(x_i)_i$ .

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- i) Es gilt stets  $H \leq l$ .
- ii) Es gilt stets  $H \geq l$ .
- iii) Es gilt stets  $H = l$ .

**B4: Rekursionsgleichungen und OGF**

4 Punkte

- a) Lösen Sie die inhomogene lineare Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_i &= 3 \cdot a_{i-1} + 2^i, \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

mittels Erzeugendenfunktionen.

- b) Lösen Sie die inhomogene lineare Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= 1, \\ b_{i+2} &= 3 \cdot b_{i+1} - 2 \cdot b_i + i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

mittels Erzeugendenfunktionen.

**Hinweis:** Sie *können* die Rekursionsgleichungen natürlich homogenisieren, *müssen* es jedoch nicht.

# Aufbauaufgaben

## 18. Aufgabe

3 Punkte

Wir bezeichnen mit *Durchmesser*  $d$  eines Graphen  $G = (V, E)$  den längsten kürzesten Pfad in  $G$ , also

$$d(G) := \max \{ \text{dist}(u, v) \mid u, v \in V \}$$

mit  $\text{dist}(u, v)$  der Länge eines kürzesten Pfades (wir zählen Kanten) zwischen  $u$  und  $v$  in  $G$ .

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Zeit  $\mathcal{O}(|V|)$  den Durchmesser eines beliebigen zusammenhängenden und kreisfreien Graphen<sup>1</sup> berechnet.

## 19. Aufgabe

2 + 1 + 2 Punkte

Bei der Baumdarstellung der Partitionen zur Lösung des UNION/FIND-Problems sind wir davon ausgegangen, dass wir die Größen eines jeden Baumes kennen, und zur Implementierung der UNION-Operation den kleineren Baum zum Sohn der Wurzel des größeren machen.

In dieser Aufgabe gehen wir davon aus, dass wir keine Größen kennen, sondern einen jeden Knoten  $x$  mit einem Gewicht  $g(x)$  versehen. Wird eine Partition mit nur einem Element als Einknotenbaum initialisiert, so wird das Gewicht dieses Knotens auf 0 gesetzt. Die UNION-Operation macht nun die Wurzel mit einem höheren Gewicht zum Vater der Wurzel mit dem kleineren Gewicht; haben beide Wurzelknoten dasselbe Gewicht, so wählen wir zufällig einen der Wurzelknoten als Vater aus und erhöhen sein Gewicht um 1. FIND-Operationen belassen alle Gewichte unverändert.

- Beweisen Sie, dass für  $|T_x|$  die Anzahl der Knoten in einem derart konstruierten Baum mit Wurzel  $x$  stets  $|T_x| \geq 2^{g(x)}$  gilt.
- Zeigen Sie, dass in der so verwalteten Datenstruktur die Operation  $\text{FIND}(x)$  in Zeit  $\mathcal{O}(\log |P_x|)$  läuft.
- Erweitern Sie die aus der Vorlesung bekannte Datenstruktur für Partitionen, die Bäume und Pfadkomprimierung benutzt, um eine Operation  $\text{SET}(x)$ . Für ein beliebiges Element  $x$  soll  $\text{SET}(x)$  die Partition  $P_x$ , in der  $x$  enthalten ist, als (neue) lineare Liste zurückgeben; die Reihenfolge der Elemente im Ergebnis spielt keine Rolle.

Die Laufzeit von  $\text{SET}(x)$  soll in  $\mathcal{O}(|P_x|)$  liegen. Weiterhin sollen die asymptotischen Laufzeiten der anderen Operationen nicht beeinträchtigt werden.

Begründen Sie Korrektheit und Effizienz Ihres Entwurfs.

**Hinweis:** Es genügt, jeden Knoten der Datenstruktur um ein Attribut zu erweitern.

<sup>1</sup>In der Literatur heißt ein solcher Graph auch „Baum“, aber unsere Definition passt nicht.

**20. Aufgabe**

3 Punkte

Sei  $T$  ein erweiterter binärer Baum mit  $n$  inneren Knoten. Beweisen Sie, dass stets  $EPL(T) = IPL(T) + 2n$  gilt.

**21. Aufgabe**

1 + 3 Punkte

- a) Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen über  $\mathbb{N}_0$  mit Wahrscheinlichkeiten-Erzeugendenfunktionen  $P_X$  bzw.  $P_Y$ . Sei außerdem  $Z = X + Y$  mit  $P_Z$ . Zeigen oder widerlegen Sie:

$$X, Y \text{ unabhängig} \implies P_Z(z) = P_X(z)P_Y(z).$$

- b) Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *negativ binomialverteilt* (auch *Pascalverteilt*) mit Parametern  $k$  und  $q$  – schreibe  $X \sim \text{NB}(k, q)$  – wenn

$$\Pr[X = i] = \binom{i+k-1}{i} (1-q)^k q^i.$$

Anschaulich ist das die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem  $\mathcal{B}(q)$  Bernoulliexperiment  $i$  Erfolge eintreten, bis  $k$  Misserfolge aufgetreten sind.

Seien  $Y_1, \dots, Y_r$  unabhängig und identisch geometrisch verteilte Zufallsgrößen mit Parameter  $p$ , also mit

$$\Pr[Y_1 = i] = (1-p)^i p$$

für  $i = 0, 1, \dots$ . Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=1}^k Y_j \sim \text{NB}(k, 1-p),$$

also dass die Summe der  $Y_i$  negativ binomialverteilt ist.