Ausgabedatum: 27.11.2014
Version: 2014-11-26 13:32

5. Übungsblatt für alle Tracks zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 05.12.2014, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Basisaufgaben

B5.1: Vorwärtskanten und Co. 3 Punkte

Es sei der Digraph G mit der Knotenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und folgender Adjazenzliste gegeben:

$$\begin{array}{rlcrl} 1 \longmapsto & 2 \to 6 & \qquad & 4 \longmapsto & 3 \to 6 \\ 2 \longmapsto & 5 & & 5 \longmapsto & 6 \\ 3 \longmapsto & \epsilon & & 6 \longmapsto & 2 \end{array}$$

Bestimmen Sie für alle sieben Kanten des Graphen, ob es sich um eine Baum-, Vorwärts-, Rückwärts- oder Querkante handelt. Nehmen Sie dabei an, dass die Tiefensuche im Knoten 1 startet.

B5.2: Speicherbedarf Graphtraversierungen 3 Punkte

Welche der Graphtraversierungalgorithmen, die Sie aus der Vorlesung kennen, brauchen wie viel Speicher zusätzlich zur Eingabe und dem Array `besucht`?

Geben Sie für die Algorithmen

- `Tiefensuche` und
- `Breitensuche`

jeweils an, in welchen der Komplexitätsklassen $\mathcal{O}(1)$, $\mathcal{O}(\log n)$, $\mathcal{O}(n)$ und $\omega(n)$ der zusätzliche Speicherbedarf im

- Best-Case und im
- Worst-Case liegt.

Hier ist n die Anzahl Knoten im Eingabegraph, den wir als zusammenhängend annehmen.

B5.3: Tiefensuche ohne Rekursion 3 Punkte

Tiefensuche ist – im Gegensatz zur Breitensuche – als rekursive Prozedur realisiert. Prozeduraufrufe erzeugen oft unerwünschten Laufzeit- und Speicheroverhead und sollten daher, sofern möglich und lohnend, vermieden werden.

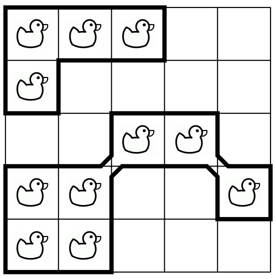
Skizzieren Sie, wie Tiefensuche ohne rekursive Prozeduraufrufe implementiert werden kann. Diskutieren Sie, inwiefern eine Verbesserung der Laufzeit zu erwarten ist.

Hinweis: Sie *können* gerne Ihre Position mit Laufzeitmessungen untermauern. Stellen Sie in diesem Fall sicher, dass Ihre Ergebnisse belastbar sind.

B5.4: Entenaufgabe I 3 Punkte

Es sei eine $n \times n$-Matrix $A : [1 : n] \times [1 : n]$ gegeben, in der jedes Element $A[i, j]$ die Werte `Wasser` oder `Ente` annehmen kann. Zwei Enten gehören (transitiv) zu derselben Entenfamilie, wenn sie entweder in horizontal, vertikal oder diagonal benachbarten Feldern "schwimmen".

Beispiel mit $n = 5$ und zwei Entenfamilien



Entwerfen Sie einen Algorithmus, der Folgendes leistet: Bei Eingabe (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, berechne die Größe der Entenfamilie, zu der die Ente an Position (i, j) gehört, sofern $A[i, j] =$ `Ente`; ansonsten gib 0 zurück.

Begründen Sie die Korrektheit und geben Sie die Zeitkomplexität Ihres Algorithmus an!

Aufbauaufgaben

A5.1: Anzahl Knoten in erweiterte Binärbäume 1 Punkt

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt erweiterte Binärbäume mit einer geraden Anzahl von Knoten $n \geq 1$.

A5.2: Durchmesser von Bäumen 4 Punkte

Wir bezeichnen mit *Durchmesser* d eines Graphen $G = (V, E)$ den längsten kürzesten einfachen Weg in G, also

$$d(G) := \max \{\operatorname{dist}(u, v) \mid u, v \in V\}$$

mit $\operatorname{dist}(u, v)$ der Länge eines kürzesten einfachen Weges (wir zählen Kanten) zwischen u und v in G.

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(|V|)$ den Durchmesser eines beliebigen zusammenhängenden und azyklischen Graphen[1] berechnet.

A5.3: Entenaufgabe II 5 Punkte

Wir betrachten nochmal die Enten aus B5.4.

Martha möchte die Entenfamilie nicht mehr in ihrem Teich haben. Sie beauftragt Ihren Mann Kurt damit, der Plage ein Ende zu bereiten. Kurt hat Skrupel und möchte so wenige Enten wie möglich töten. Er recherchiert und findet heraus, dass eine Entenfamilie die Heimat wechselt, wenn man sie in (mindestens zwei) kleinere Familien zerschlägt.

Entwerfen Sie einen Algorithmus für Kurt! Gegeben eine Teichmatrix `A` mit genau einer Entenfamilie soll dieser die Mindestanzahl Enten zurückgeben, die Kurt töten muss (und idealerweise deren Positionen), damit die Entenfamilien zerfällt.

Begründen Sie die Korrektheit und geben Sie die Zeitkomplexität Ihres Algorithmus an!

[1] In der Literatur heißt ein solcher Graph auch „(ungewurzelter) Baum“, wir haben aber nur gewurzelte Bäume definiert.