Ausgabedatum: 02.11.2012
Version: 2012-11-02 07:09

3. Übungsblatt zur Übung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: *Bis Freitag, 09.11.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden. Auf die explizite Angabe von Anfang, Mitte und Ende können Sie ab diesem Blatt verzichten.

9. Aufgabe

2 + 1 Punkte

Zeigen Sie:

a) Die Partialbruchzerlegung von $\frac{2x^2+3x-3}{x^3-7x+6}$ ist $\frac{11}{5(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{10(x+3)}$.

b) Die Ableitung von $\frac{6x^2\sin(x)}{x^3}$ ist $\frac{6\cos(x)}{x} - \frac{6\sin(x)}{x^2}$.

10. Aufgabe

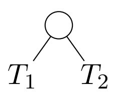
2 Punkte

Die Menge $\mathcal{T}$ der *erweiterten Binärbäume* sei (induktiv) definiert als die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. Ein einzelnes Blatt "$\square$" ist ein Binärbaum:

$$\square \in \mathcal{T}$$

2. Für zwei Bäume $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ist auch der Baum bestehend aus einem inneren Knoten "$\bigcirc$" und T_1 und T_2 als linkem bzw. rechten Teilbaum ein Binärbaum:



$$\in \mathcal{T}$$

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein solcher Binärbaum. Definiere $b(T)$ als die Anzahl Blätter "$\square$" in T und analog $k(T)$ die Anzahl innerer Knoten.

Zeigen Sie mit *struktureller Induktion*[1], dass für jeden erweiterten Binärbaum $T \in \mathcal{T}$ gilt: $b(T) = k(T) + 1$.

[1] Eine Einführung in strukturelle Induktion finden Sie im Kurzskript zu Beweistechniken (Seite 3) `http://wwwagak.cs.uni-kl.de/Veroffentlichungen/EAA/Beweistechniken-WS-12/13/Kurzskript-zum-Vorlesungsteil.html`

11. Aufgabe
4 + 2 Punkte

Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ definieren wir (als mögliche Alternative zu $\mathcal{O}(f)$)

$$\mathcal{O}'(f) := \left\{ g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; \exists c > 0\, \forall n \in \mathbb{N}_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) + c \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) > 0$, dann gilt $g \in \mathcal{O}(f) \iff g \in \mathcal{O}'(f)$.

b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, dann gilt $g = \mathcal{O}(f) \implies g = \mathcal{O}'(f)$,
aber nicht $g = \mathcal{O}(f) \impliedby g = \mathcal{O}'(f)$.

12. Aufgabe
1 + 2 Punkte

Wo ist in den folgenden “Beweisen” jeweils der Fehler:

a) $10\,\text{ct} = \frac{1}{10}\,€ = \frac{1}{5}\,€ \cdot \frac{1}{2}\,€ = 20\,\text{ct} \cdot 50\,\text{ct} = 1000\,\text{ct} = 10\,€$.

b) $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = i^2 = -1$.

13. Aufgabe
2 Punkte

Wo ist der Fehler in folgendem Induktionsbeweis:

Behauptung:
Sei $S = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ein Strauß aus n Blumen, wobei jede Blume genau eine Farbe hat.[2] Dann haben alle Blumen in S die gleiche Farbe.

Induktionsanfang:
Jeder Blumenstrauß, der nur eine Blume enthält, ist offensichtlich einfarbig.

Induktionsvoraussetzung:
Alle Blumensträuße mit n Blumen sind einfarbig.

Induktionsschritt:
Sei jetzt $S = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ ein Strauß aus $n + 1$ Blumen. Entfernen wir aus S eine Blume b_1, so besteht der Reststrauß $R_1 := S \setminus \{b_1\}$ aus n Blumen und ist nach Induktionsvoraussetzung einfarbig. Entfernen wir nun eine andere Blume b_2 aus S, so ist der neue Reststrauß $R_2 := S \setminus \{b_2\}$ nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls einfarbig.

Nun sind aber alle Blumen in $S \setminus \{b_1, b_2\}$ in *beiden* Reststräußen enthalten, folglich müssen beide Reststräuße nicht nur einfarbig sein, sondern auch die *gleiche* Farbe haben.

Weil $R_1 \cup R_2 = S$, ist auch ganz S einfarbig. $\square$

[2] Wir zählen hier nur die Farbe der Blüten und abstrahieren von Blumensorten, bei denen schon eine einzelne Blüte mehrere Farben aufweist . . .