Ausgabedatum: 09.11.2012
Version: 2012-11-08 17:09

4. Übungsblatt zur Übung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: *Bis Freitag, 16.11.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden. Auf die explizite Angabe von Anfang, Mitte und Ende können Sie verzichten.

14. Aufgabe

1 + 2 Punkte

Wir betrachten die Aussage

$$\mathcal{O}(f) = \Theta(f) \cup o(f) \qquad (\mathcal{O}\text{ha})$$

a) Wo ist der Fehler in folgendem "Beweis"?

Behauptung: ($\mathcal{O}$ha) gilt.

Beweis: durch Nachweis beider Inklusionen:

"$\subseteq$" Sei $g \in \mathcal{O}(f) \underset{\text{Lemma 1.4}}{\Longrightarrow} 0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$.

- 1. Fall: $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
  $\underset{\text{Def. } o}{\Longrightarrow} g \in o(f)$.
- 2. Fall: $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$
  $\underset{\text{Lemma 1.4}}{\Longrightarrow} g \in \Theta(f)$.

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \subseteq \Theta(f) \cup o(f)$.

"$\supseteq$" Sei nun $g \in \Theta(f) \cup o(f)$.

- 1. Fall: $g \in \Theta(f)$
  $\underset{\text{Def. } \Theta}{\Longrightarrow} g \in \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f) \implies g \in \mathcal{O}(f)$.
- 2. Fall: $g \in o(f)$
  $\underset{\text{Def. } o}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \underset{\text{Lemma 1.4}}{\Longrightarrow} g \in \mathcal{O}(f)$.

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \supseteq \Theta(f) \cup o(f)$.

Beide Richtungen gemeinsam zeigen die Behauptung. ⬚

b) Widerlegen Sie die Aussage ($\mathcal{O}$ha).

15. Aufgabe

2 Punkte

Zeigen Sie: $\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 > 9\} \cap \{a \in \mathbb{R} \mid 3a - 2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x - 2 > 4\}$.

16. Aufgabe

2 + 3 + 1 Punkte

Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie:

a) $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$ für alle $n \geq 0, k \geq 1$.

b) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Ein Beweis per Induktion ist möglich ...

c) $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$ für alle $n \geq 1$.