

## 5. Übungsblatt zur Übung Beweistechniken, WS 12/13

**Abgabe:** Bis Freitag, 23.11.2012, 12:00 Uhr, Abgabekasten vor 48-694.

**Hinweis:** Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden.

### 17. Aufgabe

1 + 2 Punkte

Zeigen Sie:

(Machen Sie sich jeweils klar, was das “=” bedeutet!)

a)  $(f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h)) \implies f = \Theta(h)$ .

b)  $f = \Theta(g) \iff \Theta(f) = \Theta(g)$ .

### 18. Aufgabe

1 + 1 Punkte

Zeigen Sie:

a) Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $\sum_{i=1}^n i^m = \mathcal{O}(n^{m+1})$ .

b) Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $\sum_{i=1}^n i^m \log i = \mathcal{O}(n^{m+1} \log n)$ .

### 19. Aufgabe

1 + 1 + 1 Punkte

Es seien Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  und Polynome  $p_1, \dots, p_m$  in  $n$  gegeben, wobei für  $i \in \{1, \dots, m\}$   $f_i \in \mathcal{O}(p_i(n))$  gilt. Ferner sei  $\deg(p)$  der *Grad* des Polynoms  $p$ .

Zeigen Sie:

a)  $p_1 = \mathcal{O}(n^d) \iff d \geq \deg p_1$ .

$p_1 = \Omega(n^d) \iff d \leq \deg p_1$ .

$p_1 = \Theta(n^d) \iff d = \deg p_1$ .

b) Sei  $k$  so gewählt, dass  $\forall i \in \{1, \dots, m\} : \deg(p_i) \leq \deg(p_k)$ . Dann gilt

$$\sum_{i=1}^m f_i = \mathcal{O}(p_k(n)).$$

c)  $\prod_{i=1}^m f_i = \mathcal{O}(n^{\deg(p_1) + \dots + \deg(p_m)})$ .

## 20. Aufgabe

2 Punkte

Wo ist der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

**Behauptung**  $\sum_{i=1}^n (2i + 1) = \mathcal{O}(n)$

**Induktionsanfang**  $n = 1$

$$\sum_{i=1}^n (2i + 1) = 3 = \mathcal{O}(1)$$

**Induktionsvoraussetzung**

Angenommen, die Behauptung gilt für ein festes  $n$ .

**Induktionsschritt**  $n \rightarrow n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i + 1) = 2(n + 1) + 1 + \sum_{i=1}^n (2i + 1) \tag{1}$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} \mathcal{O}(n) + 2n + 3 \tag{2}$$

$$= \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) \tag{3}$$

$$= \mathcal{O}(n) \tag{4}$$

$$= \mathcal{O}(n + 1). \tag{5}$$

**21. Aufgabe**

1 + 3 Punkte

Zeigen Sie:

**Tip:** Benutzen Sie Strukturelle Induktion.

- a) Die Anzahl Knoten (Blätter und innere Knoten) in einem erweiterten Binärbaum ist ungerade.
- b) Jedes Loop-Programm (ohne Makros und Abkürzungen) besteht aus einer durch 5 teilbaren Anzahl von *Tokens*. Dabei zählen wir Token wie folgt:
  - Whitespace (Leerzeichen, Tabs, Zeilenumbrüche etc.) wird ignoriert.
  - Strichpunkte werden ignoriert.
  - Variablen, Konstanten, Trenn- und Operationssymbole sind je 1 Token.
  - In Schlüsselwörtern (Loop, Do und End) zählt jeder Buchstabe als ein Token.

**Beispiel:**

```

Loop x Do y := z - 0 End;  Loop y Do z := z + 100 End
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
  5           10          15          20          25          30

```